679. D'Amorer B., Fandiño Pinilla M.I. (2009). L'effetto *Topaze*. Analisi delle radici ed esempi concreti di una idea alla base delle riflessioni sulla didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*. Anno 23, numero 1, pagine 35-59. ISSN: 1120-9968.

L'effetto *Topaze.*
Analisi delle radici ed esempi concreti di una idea alla base delle riflessioni sulla didattica della matematica

Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD – Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
ASP - Alta Scuola Pedagogica, Locarno
Mescud - Dottorato di Ricerca in Educación Matemática, Bogotà

Summary. *Amongst the most quoted "classical" topics in Mathematics Education at an international level, there are some that risk to be acquired in a acritical manner or quoted incorrectly. We believe that among these, the so called "Topaze effect", conceived and launched by Guy Brousseau in the 60s, is a significant example. It is quoted in thousands of occasions, but rarely its historical origin and the reason of the sharp denomination are analyzed. It in fact happens that someone translates "Topaze" in various languages, as if it were the common noun of an object instead of the proper noun of a person. The investigation that follows does not pretend to put right this state of affairs in general, but as far as possible, to start a reflection and push other people on this path, before it is too late.*

Sunto. *Ci sono argomenti "classici" di didattica della matematica, tra i più citati a livello internazionale, che rischiano di essere acquisiti in maniera acritica o citati a sproposito. Tra questi, il cosiddetto "effetto Topaze", ideato e lanciato tra gli studi di didattica della matematica da Guy Brousseau negli anni '60, ci sembra un esempio significativo. Appare citato in mille occasioni, ma quasi mai se ne analizza l'origine storica, o la motivazione dell'acuta denominazione. Tanto è vero che c'è chi traduce "Topaze" nelle varie lingue, come se fosse nome comune di cosa, invece che nome proprio di persona. Lo studio che segue non ha la pretesa di porre rimedio in generale a questo stato di cose ma, nei limiti del possibile, avviare ad una riflessione e spingere altri su questa stessa strada, prima che sia troppo tardi.*

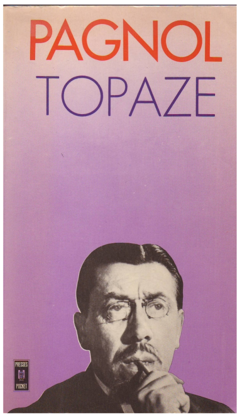
1. Una commedia francese

Marcel Pagnol (1895 - 1974) è un geniale è ben noto scrittore e regista francese di teatro e di cinema, membro dell'*Académie française* dal 1946.

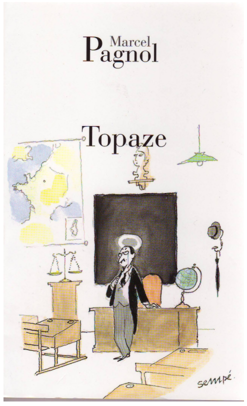
Marcel Pagnol

Fernandel

Ex insegnante, dapprima elementare (come il padre) e poi di inglese in un liceo, ha spesso diretto da sé stesso i propri testi, sia in teatro che al cinema; ha avuto a disposizione veri e propri talenti teatrali e cinematografici, tra i quali spicca il celebre Fernandel, al secolo Fernand Joseph Desiré Contandin (1903 – 1971). Era considerato da Roberto Rossellini il «vero creatore del cinema realista».
Mercoledì 9 ottobre 1928, quando ancora era insegnante a Parigi, mise in scena per la prima volta il suo celebre pezzo in 4 atti, *Topaze*, proprio a Parigi, nel teatro "Variétés"; il ruolo del protagonista fu affidato ad André Lafaur; lo replicò poi più volte anche in altre città.
Nel 1931 ne uscì il testo a stampa, per i tipi dell'editore Fasquelle di Parigi; fu più volte editato da varie case editrici.



La copertina del libro nella riedizione del 1981, Parigi: Presses Pocket



La copertina del libro nella riedizione del 2004, Parigi: Éditions de Fallois

Dell’opera si fecero ben tre versioni cinematografiche: la prima di Louis Gasnier nel 1932 con Louis Jouvet come protagonista; la seconda diretta da Pagnol nel 1936 con Alexandre Antoine Arnaudy; una terza, sempre diretta dallo stesso Pagnol nel 1950, con Fernandel.

M. Topaze mentre annuncia ai propri allievi che il giorno dopo vi sarà un compito in classe di morale; ma quel giorno stesso verrà licenziato

Un’altra scena del film del 1950

È la storia di un insegnante di una scuola privata messo alla porta dal suo direttore-padrone per non aver accettato compromessi consistenti nel promuovere anziché bocciare il figlio di una ricca baronessa, sostegno finanziario della scuola stessa, pronta ad assumere Topaze, l’*ingegner* Topaze, per lezioni private molte ben remunerate.

Trovatosi senza lavoro, Topaze accetta, dapprima in buona fede, poi rendendosi conto della verità, di fungere da cane di paglia di un avventuriero, uno speculatore senza scrupoli che basa la propria attività sulla corruzione politica ed il raggiro. Alla fine, però, l'intelligenza di Topaze lo porta ad impadronirsi dell'impresa, senza dolo, e ad avventurarsi con successo nel mondo degli affari, trovandovi una strada legittima. In tutta questa storia non mancano affari di cuore relativamente singolari ed il tentativo del direttore di riassumere Topaze, anche per dargli in moglie la figlia precedentemente negata.

2. Una commedia francese e la didattica

Bene, che cosa ha a che fare tutto ciò con la didattica della matematica e con la didattica in genere?
La commedia è stata resa celebre nel nostro mondo dal fatto che Guy Brousseau, fin dagli anni '60, abbia evidenziato un modo di fare tipico di certi insegnanti, che ha proprio denominato "effetto Topaze".[1] In che cosa consiste?
Per mostrarlo, useremo proprio l'inizio della sceneggiatura. Per rendere l'idea di quel che succede, lasceremo parte del testo in francese, com'è in originale, visto che il tutto si gioca sulla formazione del plurale specifica per quella lingua.

Atto Primo, scena prima.

Quando il sipario si alza, M. Topaze fa fare un dettato ad un allievo. M. Topaze ha trenta anni circa. Lunga barba nera [che poi raderà] *che termina a punta sul primo bottone del gilet. Collo dritto, molto alto, come in celluloide, cravatta miserabile, redingote logora, scarpe a bottoni.*
L'Allievo è un piccolo ragazzo di dodici anni. Volta le spalle al pubblico. Si vedono le sue orecchie "a sventola", il suo collo d'uccello mal nutrito. Topaze detta e, di tanto in tanto, si tende sulla spalla del piccolo ragazzo per leggere quel che ha scritto.

TOPAZE, *detta sporgendosi.*

«Des moutons [delle pecore]… Des moutons… erano in un

[1] Di solito, a questo proposito, si usa citare Brousseau (1986a); ma ci sono descrizioni di tale effetto da parte di Brousseau fin dagli anni '60.

recinto… in un parco; in un parco. (*Si sporge sulla spalla dell’Allievo e riprende*). Des moutons… moutonss… (*L’Allievo lo guarda, sgomento*). Vediamo, ragazzo mio, fate uno sforzo. Io dico *moutonsse*. Étaient [Erano] (*riprende con finezza*) *étai-eunnt*. Questo vuol dire che non c’era solo un *moutonne*. C’erano più *moutonsse*».

L’Allievo lo guarda perso. A questo punto, attraverso una porta che s’apre a destra al centro della scena, entra Ernestine Muche [figlia del direttore della scuola, anch’ella insegnante, di cui Topaze è innamorato]. È una ragazza di venticinque anni, piccolo-borghese vestita con una eleganza a buon mercato. Porta un tovagliolo sotto il braccio.

[Fine della scena prima].

In che cosa consiste la particolarità didattica della scena?

L’insegnante non ha un reale interesse all’*apprendimento* dell’allievo, vuole solo ottenere da lui che scriva in modo corretto quel che gli sta dettando. Considererà che la sua azione di insegnante ha avuto un esito positivo se l’allievo scriverà quel che lui ha in mente. Non importa con quale mezzo, facendoglielo scrivere anche senza reale comprensione.

Questo fatto càpita spesso in aula e soprattutto capitava in certe situazioni nelle quali si proponevano situazioni create artificialmente a partire dalle quali si voleva far sì che l’allievo apprendesse in modo generale, non legato alla circostanza; stiamo facendo riferimento ai cosiddetti “materiali strutturati”. Ma capita tuttora, indipendentemente da questo.

Rientra tra le *attese dell’insegnante nei riguardi dello studente*.

Ma lo studente sa che, una volta iniziata l’attività, non sarà così importante averla capita, quanto attendere questo momento nel quale l’insegnante si lancerà in suggerimenti impliciti che porteranno l’allievo stesso a scrivere o a rispondere quel che l’insegnante vuole leggere o sentir dire da lui.

Rientra tra le *attese dello studente nei riguardi dell’insegnante*.

“Successo in aula” significa che le *due attese* si sono rivelate non invano, che l’insegnante ha ottenuto quel che voleva e che lo studente ha ottemperato al suo compito, far ottenere all’insegnante quel che desiderava ottenere.

Si chiama, in generale: *contratto didattico*; e l’effetto specifico si chiama appunto “effetto Topaze”.

In piena "nuova matematica", anni '60, Guy Brousseau lo metteva in evidenza; già si tratta di un danno notevole per il sistema di insegnamento-apprendimento, ma lo è ancora di più in quelle circostanze nelle quali solo l'insegnante sa quel che sta succedendo. Propone un gioco che ha delle regole, il ragazzo vi gioca. Se riesce è perché non c'era bisogno del gioco, era cioè già padrone delle regole. Se non riesce, è l'insegnante che crea le condizioni per il "successo". Nessuno ha imparato nulla, ma l'illusione è totale.

Guy Brousseau, medaglia Klein 2003

Chi o che cosa determina questo modo di fare? Certamente quella che Brousseau chiama l'*epistemologia dell'insegnante* (Brousseau, 2008; D'Amore, 2006; Brousseau, D'Amore, 2008).

Abbiamo quindi chiamato in causa due fattori interessanti per la moderna analisi didattica:

il contratto didattico ed in esso l'effetto Topaze;

l'epistemologia spontanea dell'insegnante;

il tutto all'interno di una teoria che, a nostro avviso, può riservare grandi sorprese ed ancora ha bisogno di essere indagata e studiata (D'Amore, Fandiño Pinilla. Marazzani, Sbaragli, 2008).
Ebbene, in questa occasione ci limiteremo a quelle indicazioni bibliografiche che riteniamo più pertinenti per il contratto didattico, l'epistemologia spontanea dell'insegnante e la teoria delle situazioni; ed esamineremo qui, sotto forma di esempi, l'effetto Topaze così come si

manifesta in varie situazioni d’aula, grazie all’aiuto di colleghi e collaboratori.

3. Esempi di “effetto Topaze”

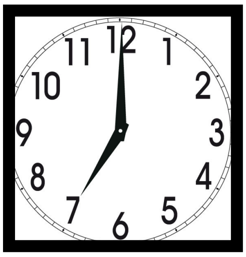
Scuola superiore, II

Sulla lavagna appare scritta l’equazione di II grado: $3x^2$-27=0; uno studente (A) ha il compito di risolverla. L’insegnante attende, il resto della classe guarda.
A (puntando l’indice della destra verso la lavagna, ma guardando l’insegnante): Questa non si può.
L’insegnante capisce al volo: A intende dire che l’equazione non è nella forma canonica completa ($ax^2+bx+c=0$) in quanto manca il termine di I grado (b=0); questo sgomenta l’allievo che non sa più come applicare la formula risolutiva.
Ins: Potresti usare lo stesso la formula, oppure agire in un altro modo, portando il 27…
Guarda sorridendo A ed ammicca alla classe.
A scrive: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; con la punta del gesso tocca l’equazione e dice: Vede? Qui…
Ins: Potresti continuare così, ma puoi anche fare in un altro modo. Guarda bene l’equazione. (Tace un istante). Vedi? Puoi prendere il meno 27 e portarlo… Dove? Otterresti più…
A guarda i compagni, la sua formula risolvente e l’equazione; sembra non ascoltare neppure l’insegnante.
L’insegnante si avvicina, ignora quel che ha scritto l’allievo, prende un altro pezzo di gesso e, a destra di $3x^2$-27=0, scrive: $3x^2$=; poi si fa da parte e sorride ad A ed alla classe.
A: Ma qui, non… Nel discriminante…
Ins: Lascia stare il discriminante, guarda bene. (Fa un segno sotto il –27 dell’equazione da risolvere e punta il gesso sul – toccandolo più volte, poi a destra di $3x^2$= scrive +). Che cosa puoi scrivere qui?
Finalmente lo studente sembra sentire la voce dell’insegnante, smette di concentrarsi sulla strada che voleva percorrere e che lo imbarazzava e risponde rapidamente:
A: +27.

Ins: Bene, molto bene, vedi? Scrivilo.
Lo studente scrive: $3x^2=+27$.
Ins: E adesso, vedi che si può semplificare?
A questo punto lo studente entra nel meccanismo pensato dall'insegnante, semplifica e, facilmente, trova le radici dell'equazione.
L'azione didattica ha avuto "successo": l'insegnante ha visto scritto quel che voleva, lo studente ha avuto approvazione dell'insegnante.
Probabilmente, se lo studente rifletterà su quel che è successo, crederà, come effetto secondario di questa scena, che: se in una equazione manca il termine di I grado, NON si può usare la formula risolutiva generale.

Scuola dell'infanzia

L'attività si chiama: *Caccia alle forme*, e consiste nel gioco seguente; la maestra enuncia il nome di una forma (Tondo, Quadrato, Triangolo…) ed i bambini vanno a caccia in tutta la sezione di oggetti che hanno quella forma. Vince chi ne trova di più o chi trova i meno evidenti.
Su una parete dell'aula c'è un orologio analogico più o meno fatto come segue.



Il quadrante è rotondo, ma inserito in una scatola-cornice quadrata di legno con il bordo nero.
La maestra enuncia: «Tondo»; e tutti i bambini vanno a caccia; sono ammessi anche oggetti sferici come palle e palline; ed anche cilindriche; qualche bambino raccoglie un birillo mostrandone la base. Ma P non trova nulla. La maestra lo incoraggia:
Ins: P, guarda bene attorno a te.
P guarda, deluso.
Ins: Sulla porta, un po' più in qua (indica con la mano, praticamente l'orologio).
P guarda, ma non vede nulla di tondo.
Ins: Guarda bene, serve a misurare l'ora.

P guarda tutto attorno, guarda anche l’orologio, ma mostra di non riconoscere la forma tonda.
Ins: Vedi, vedi? Come fai a non vedere? Non lo vedi il tondo, non lo vedi proprio?
E con le mani, aprendo i due pollici ed i due indici, forma un tondo, mentre con il mento indica chiaramente l’orologio.
P mostra di capire il suggerimento, guarda la parete giusta, ma non vede il tondo.
La maestra si alza, lo prende per mano, lo porta davanti all’orologio:
Ins: Che forma ha quello?
P: Quadrato.
Ins: Ma no, no, non vedi che è tondo? Non è tondo? È tondo, vero?
P: Sì.
Ins: Visto, visto che bravo che sei? (E poi a tutti:) Avete visto? P ha visto l’oggetto più tondo, nessuno di voi lo aveva visto. Vincete tutti alla pari, ma P ha scelto il più bello.
Da questo episodio in poi, i commenti sono lasciati al Lettore.

Scuola primaria, II

L’insegnante ha proposto l’esercizio seguente, che gli allievi devono risolvere per iscritto sul quadernone:
«Andrea ha 4 figurine, ma ne deve restituire 10 al suo compagno Pietro; quante figurine deve aggiungere a quelle che ha già?».
Il primo a finire ed a precipitarsi alla cattedra è S che ha risolto l’esercizio come segue:

Risoluzione
4+6=10 (figurine che deve aggiungere)

Risposta
Andrea deve aggiungere 10 figurine

L’insegnante cerca di correggere quanto scritto da S.
Ins: Ma scusa, se ne ha 4 e deve arrivare a 10, quante ne deve aggiungere?
S: 6, è come ho fatto io.
Ins: Sì, ma come lo trovi 6, che operazione devi fare?
S: Il più, perché 4+6 fa 10.
Ins: Sì, ma per avere 6 devi fare, che cosa, non il più, ma.. ma…

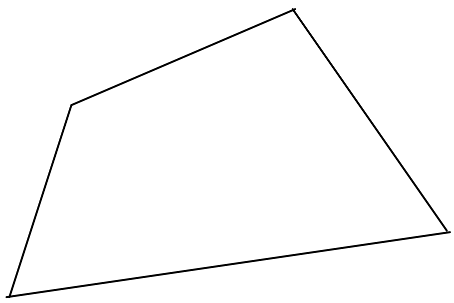
S tace, guardando la pagina del suo quadernone.
Ins: Se ti dico che non devi fare il più, che cosa dovrai mai fare?
S (in tono interrogativo): Il meno?
Ins: Bravo, vedi? Il meno. Vai a posto e correggi di sotto.
S: Ma questo lo devo cancellare?
L'insegnante prende il quaderno e sbarra risoluzione e risposta di S.
Ins: Ecco, fa finta di niente e rifai di sotto, va bene così, non ti preoccupare.
S, non troppo convinto, torna a posto, mentre la classe si agita e molti bambini si alzano per mostrare all'insegnante quanto hanno realizzato.
S scrive:

Risoluzione
10-6=4 (figurine che deve dare)

Risposta
Andrea deve aggiungere 4 figurine

Corso di laurea in Scienze della formazione primaria

Ins: Mi sai dire se il quadrato può essere considerato un caso particolare di rettangolo?
A: No, il quadrato è il quadrato e il rettangolo è il rettangolo.
Ins: Che cosa è secondo te un rettangolo?
A: Un quadrilatero.
Ins: Un quadrilatero senza nessuna proprietà caratteristica? Tipo questo?



A: No, un quadrilatero particolare.
Ins: Ah… E che cosa ha di particolare un rettangolo?
A: Ha gli angoli tutti uguali.
Iins: Bene, quindi per te un rettangolo è un quadrilatero con gli angoli

della stessa ampiezza.
A: Sì, un quadrilatero con tutti gli angoli della stessa ampiezza.
Ins: Bene, anche il quadrato ha gli angoli della stessa ampiezza?
A: Certamente sì!
Ins: Quindi il quadrato può essere considerato un caso particolare di rettangolo visto che rientra nella definizione che hai scelto per un rettangolo.
A: Sì, il quadrato può essere considerato un caso particolare di rettangolo.

Corso di laurea in Scienze della formazione primaria

Ins: Considera l'insieme dei numeri naturali. Sono di più i numeri *pari* o i numeri naturali?
A: Sono di più i naturali.
Ins: Sei sicuro? Pensa ai due insiemi: naturali e pari.
A: Ah, ecco: sono lo stesso numero perché sono infiniti.
Ins: Sì, ma non basta; essere tutt'e due infiniti non comporta che siano equinumerosi.
A: Se sono infiniti…
Ins: Scrivi i primi numeri naturali.
A: Eccoli (scrive: 0 1 2 3 4). Posso fermarmi?
Ins: Sì, metti pure i puntini e scrivi sotto i numeri pari.
A (scrive 0 1 2 3 4, …. Poi, nella riga sotto scrive: 0, 2, 4, 6): Mi posso fermare e mettere i puntini?
Ins: Sì. Quindi che cosa vedi?
A: Che cosa vedo… Che sono infiniti.
Ins: Guarda! Sotto allo 0 che cosa gli corrisponde?
A: Lo 0.
Ins: E sotto l'1?
A: Il 2.
Ins: Quindi?
A: Sotto il 2 il 4.
Ins: Quindi?
A: Si corrispondono.
Ins: Spiegati meglio.
A: Sotto a un numero dei naturali ce n'è uno dei pari.
Ins: Esatto, quindi si crea una corrispondenza…
A: Tra i due insiemi.
Ins: Una corrispondenza di che tipo?
A: A uno a uno.
Ins: Quindi *biunivoca*. Allora, sono di più i numeri naturali o i numeri pari?
A: Non lo so.
Ins: Ma se a ognuno ne corrisponde uno, uno a uno, sarà, come sarà? In quale insieme ce n'è di più?
A: In nessun dei due è di più, si crea una corrispondenza.

Corso di laurea in matematica

Ins: Enuncia la proprietà transitiva.
A (a voce e, contemporaneamente per iscritto): Se a in relazione con b e b in relazione con c, allora a in relazione con c.
Scrive: aRb , bRc = aRc.
Ins: Ci sono tante cose che non vanno. Per prima cosa, che cosa ci fa quell'uguale?
A tace.
Ins: Tu hai detto "se …, allora…", dunque non ci vuole un uguale.
A tace.
Ins: Come si scrive "se …, allora…" in simbolismo matematico?
A tace, ma scrive: aRb, bRc $\Rightarrow$ aRc.
Ins: Così va meglio. E poi, tu hai detto "e", ma poi scrivi una virgola. Come si scrive "E" in simbolismo matematico?
A tace, ma scrive: aRb, $\wedge$ bRc $\Rightarrow$ aRc.
Ins: Ma no, ma no, se metti la "e", devi togliere la virgola.
A scrive: aRb $\wedge$ bRc $\Rightarrow$ aRc.
Ins: Sì, così va bene. Solo che tu dici a, b, c; ma vale solo per qualcuno o per tutti? Sai, io posso sempre trovare una terna speciale per cui la proprietà vale, ma poi non vale per tutta la relazione.
A tace; sembra non aver capito nulla di quanto dice l'esaminatore.
Ins: Insomma, dovrà valere per tutti, no?
A: Sì, per tutti.
Ins: E come si scrive?
A tace.
Ins: Per ogni a, per ogni b, dai continua.
A: Per ogni c.
Ins: Ecco vedi? E come si fa a scrivere con simbolismo matematico?
A scrive: $\forall$abc, davanti alla formula precedente.
Ins: Va be', non è scritto molto bene, ma ci siamo. Hai capito?
A: Sì.

Corso di laurea in matematica

Ins: Enuncia dunque il teorema, dai.
A (a voce e scrivendo le formule che enuncia): Una funzione f: $M_1 \rightarrow M_2$ fra due spazi metrici è continua se e solo se per ogni aperto U di M_2

l'insieme $f^{-1}(U)$ è aperto in M_1.
Ins: Bene. Che cosa asserisce a parole questo teorema?
A: Che se una funzione effe tra due spazi metrici emme uno ed emme due è continua, questo significa che per ogni aperto U di emme due l'insieme effe alla meno uno di U è aperto in emme uno.
Ins: Va bene, questo è il teorema, ma che cosa significa?
A: Che se…
E poi tace.
Ins: Dai, su, che cosa dice? Non lo vedi? Dice che f è continua…
A tace.
Ins: … f è continua se e solo se le controimmagini di insiemi aperti sono…
A: Sono sottoinsiemi di emme due.
Ins: Ma no, ma no, che sciocchezza. Le controimmagini di insiemi aperti sono… sono anche loro…
A tace.
Ins: Le controimmagini di insiemi aperti sono a loro volta…
A: Aperte?
Ins: Sì, ecco, questo, questo è. Dunque f è continua se e solo se le controimmagini di insiemi aperti…
A: Sono aperte.
Ins: Oh, bene, hai visto che lo sai?

Scuola media, III, fine anno scolastico

R sta scrivendo alla lavagna: $(x+2y)^2 = x^2+4y^2$. Guarda l'insegnante, soddisfatto.
Ins, sorridendo: Non dimentichi qualcosa?
R controlla quel che ha scritto e guarda l'insegnante. Da posto si sente una voce: Sì, manca…
Ins: No, no, silenzio, R ce la fa da solo.
R guarda la classe e l'insegnante.
Ins: Ti ricordi? A più b alla seconda, è… è…
R: Sì, è…
Ins: Prova a scriverlo alla lavagna.
R non sa che cosa scrivere.
L'insegnante si avvicina, gli prende il gesso di mano e, in un lato della lavagna, scrive:
$(a+b)^2 =$

e poi restituisce il gesso ad R.
R completa così:
$= a^2+b^2$
e guarda l’insegnante.
Ins: Ma come, no, non è così, non ti ricordi quante volte l’abbiamo fatto? Cosa manca, eh?, che cosa manca?
Una voce dalla classe: Due a b.
Ins, stizzito: Ma no, dai, lasciatelo pensare. Vero R? Vero? Manca…
R completa e alla fine appare l’uguaglianza:
$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$.
R guarda l’insegnante.
Ins: Ecco, bravo, vedi? Allora, adesso torniamo al caso di prima, ed indica l’uguaglianza “monca”: $(x+2y)^2 = x^2+4y^2$.
Ins: Vedi, che cosa manca? Dai.
R, molto titubante, “completa”:
$(x+2y)^2 = x^2+4y^2+2ab$.
Ins: Ma no, ma su, ma come fai? Ma lì non c’erano a e b, cerano x e 2y. Devi stare attento.
R cancella +2ab e tiene il gesso sospeso.
Ins: Devi fare il prodotto che è… che è 2xy, ma poi il DOPPIO prodotto, vero?, lo hai visto anche tu, il DOPPIO. Dunque il doppio di 2xy che è, dai…
R azzarda, molto incerto, a bassa voce: 4xy.
Ins: Oh, alla fine, dunque, scrivi alla fine il risultato.
R esegue bene e l’insegnante commenta: Visto?, visto ragazzi, è inutile suggerire, chiunque ce la può fare da solo, basta concentrarsi e ricordare. La somma dei quadrati ed il doppio del prodotto, bisogna ricordarselo così.

Scuola primaria, I

L’insegnante propone agli allievi un lavoro per costruire competenze intorno all’idea di metà. Il lavoro nella fase iniziale presuppone la ricerca, da parte dell’insegnante stesso, delle immagini ingenue già possedute dagli allievi. Si tratta di rispondere alla domanda:

> Due bambine hanno a disposizione 7 gessi colorati di colori diversi per realizzare un disegno. Quanti ne toccano a ciascuna, se li dividono in parti uguali?

L’insegnante ha in mente la risposta che a suo avviso è legittimo avere:

tre gessi e mezzo per ciascuna delle due bambine.
Riportiamo un lungo brano del colloquio fra l'insegnante e un'allieva:
A: Se li vogliono tutte e due uguali li devo spezzare a metà.
Ins: Ma guarda che non ti serve spezzarli *tutti* [con enfasi] a metà; forse puoi dividerli in parti uguali anche in un altro modo.
A: No. Li devo spezzare tutti a metà. Se non li spezzo tutti a metà come faccio a darglieli uguali?
Ins: Potresti provare a darne uno alla prima bambina, e poi….
A: Ma così il gesso rosso lo prende solo lei, poi non ce ne sono altri rossi.
Ins: Prova a darne uno rosso alla prima bambina e uno giallo alla seconda bambina, avranno un gesso a testa. Il numero dei gessi che hanno in mano è lo stesso.
A: Ma come fa la prima bambina a colorare il sole se non ha il giallo?.
L'allieva viene inviata a fare come pensa e spezza a metà tutti i sette gessi per darne poi metà di ciascuno ad ognuna delle due bambine.
Ins: E adesso quanti gessi ha la prima bambina? E quanti la seconda?
A: Sette la prima e sette la seconda. Hanno tutti i colori che servono tutte e due.
Ins: Ma non sono sette gessi, questo [prende in mano mezzo gesso verde] non è *un* gesso».
A: Sì, è un gesso. È quello per fare il prato.
Ins: No. Non è un gesso, non vedi che è metà?
A: Ah, è metà!
Ins: E se lo metto insieme ad un'altra metà, quanti gessi ho in mano?
A: Due pezzi, ma ne toccano uno ad ogni bambina perché hai in mano due pezzi verdi. Uno devi darlo alla prima e uno alla seconda, così hanno tutt'e due il gesso verde per colorare il prato.
Ins: Attenta! Guarda insieme a me. Se io metto insieme i due pezzi verdi, non ottengo un gesso intero?
A: Sì…Ma ad ogni bambina ne devi dare un pezzo verde, un pezzo giallo, un pezzo rosso, un pezzo bianco, un pezzo celeste, un pezzo arancione e un pezzo marrone.
Ins: Va bene, ma tutti questi pezzi insieme, quanti gessi sono?
A: Sette, sono di sette colori diversi.
Ins: Attenta! Guarda insieme a me. Metto insieme mezzo gesso rosso e mezzo gesso giallo. Quanti gessi ho?
A non risponde.

Ins: Attenta! Non è vero che ho *un* gesso? *UNO*?
A non risponde.
Ins: E prendendo ogni volta mezzo gesso di colori diversi, quanti gessi posso ricomporre?
A. non risponde.
Ins: Attenta! Non è vero che mezzo gesso messo insieme ad un altro mezzo gesso è un gesso intero?
A: Sì?
Ins: Sì! E se lo faccio di nuovo non ho un altro gesso?
A: Sì?
Ins: Sì! Brava! E se qui ho un gesso e qui un altro gesso, quanti gessi ho in tutto?
A: Due?
Ins: Sì! Due, due, brava! E se prendo altri due pezzi di colore diverso e li metto insieme, non ho un altro gesso? E allora sono…
A: Tre?
Ins: Bravissima! Vedi, vedi? Ora però ho solo due mezzi gessi e ne devo dare metà ad ogni bambina. Quanti gessi ha ora ogni bambina?
A non risponde.
Ins: Prima ne avevi tre per ogni bambina, ora ne aggiungi mezzo. Sono tre e… Tre e [mostra una metà]…
A: Mezzo?
Ins: Sì! Bravissima: sono tre e mezzo!

Scuola dell’infanzia

L’insegnante ha parlato con i propri allievi di figure geometriche mostrando modelli diversi per riflettere sui nomi delle figure stesse e per denominarle, dopo averle riconosciute. In questo momento, l’attenzione è rivolta al rettangolo che un bambino chiama “quadrato”.
L’insegnante lo prende a parte e gli mostra un foglio di carta formato A4 bianco e gli chiede:
Ins: Cos’è?
La risposta che si attende è: Un rettangolo.
A: È un foglio di carta.
Ins: Sì. È vero, ma a cosa assomiglia?
A: Assomiglia a quelli delle fotocopie.
Ins: Ma guarda bene. Com’è?
A: È bianco.

Ins: Sì, ma che forma ha?
A: Ha la forma del quadro che ho a casa.
Ins: Bene. Quella forma ha un suo nome.
A: Quadrato!
Ins: Non è proprio un quadrato. È allungato.
A: È un quadrato allungato.
Ins: Ma questa figura un po' allungata ha un suo nome. Te lo ricordi?
A non risponde.
Ins: Ne parlavamo anche ieri quando imparavamo la filastrocca delle forme.
A non risponde.
Ins: Ha un nome un po' lunghino è un…
A: Quadrato.
Ins: Ma no… Ha il nome un po' lunghino è un bel…
A: Quadratino allungato.
Ins: Ma no. Ha il nome un po' lunghino è un bel re… Un bel ret… Un bel retta…
A: Rettangolino?
Ins. Bravo! Vedi che lo sapevi?

Scuola Primaria, II

In classe l'insegnante propone l'abaco; per alcuni giorni, attraverso situazioni didattiche, invita gli allievi a considerare la pallina posta nella seconda asta da destra come dieci palline messe nella prima asta a destra.
Un'allieva non riesce a far sua l'idea di valore posizionale e continua a contare le palline dell'abaco come se fossero tutte unità.
L'insegnante propone alla bambina una rappresentazione con l'abaco in cui c'è una pallina sull'asta delle decine e due palline sull'asta delle unità. Come risposta alla domanda: Che numero è?, si aspetta la risposta: 12. Invece A risponde:
A: Sono tre palline.
Ins: È vero, ma non hanno tutte lo stesso valore, ricordi?
A: Però sono tre palline.
Ins: Sì, ma il numero rappresentato è un altro, non ricordi?
A: È il tre.
Ins: Ricordi quanto vale una pallina della prima asta?
A: Uno.

Ins: Sì, certo. E qui quante palline ci sono?
A: Due.
Ins: Bene. Allora sono rappresentate due unità.
A non dice nulla.
Ins: Ora non considerare più la prima asta, guarda la seconda. Qui quante palline ci sono?
A: Una.
Ins: Certo, ma questa non vale una unità, ma di più. Ricordi quante?
A non dice nulla.
I: Ricordi che abbiamo messo tutte insieme un certo numero di palline e poi le abbiamo cambiate con una che aveva lo stesso valore?
A non risponde.
Ins: «Ma certo che lo ricordi, vero? E quante erano le palline che abbiamo messo tutte insieme?
A non dice nulla.
Ins: Ma certo che lo ricordi. Erano tante quante sono le dita delle tue mani, ricordi?
A: Cinque?
Ins: Ma no. Non di una mano sola, di tutte e due. Quante sono le dita di tutte e due le tue mani?
A: Dieci!
Ins: Brava. Dieci! Questa pallina vale dieci. E con le altre due?
A non dice nulla.
Ins: Dai continua a contare. Dieci, undici (toccando una delle palline - unità) e… (toccando l’altra pallina unità)».
A: Dodici?
Ins: Brava, qui è rappresentato il numero dodici.

Scuola primaria, V

L’insegnante per diverso tempo ha proposto lavori per permettere agli allievi di costruire l’idea di angolo come parte (illimitata) di piano compresa fra due semirette aventi origine comune.
Si trova ora a riflettere sui poligoni e sugli angoli interni di un poligono.
La risposta che vorrebbe avere dagli allievi e che reputa corretta è: gli angoli interni del poligono sono illimitati.
Un allievo non riesce a visualizzare questa rappresentazione e considera gli angoli interni del poligono limitati dai lati della spezzata chiusa che delimita il poligono stesso.

L'insegnante chiama l'allievo a sé e disegna un triangolo.
Ins: Che cos'è un angolo in matematica?
A: La parte di piano che non finisce mai e che sta dentro due semirette.
Ins: Benissimo! Ricordi come l'avevamo rappresentata?
A: Sì. Devo colorare tutto il foglio che sta dentro le due linee (intendendo semirette).
Ins: Bravo! Nel triangolo che hai davanti quanti angoli ci sono?
A: Tre.
Ins: Bene. Ora devi colorare un angolo (indica un vertice del triangolo). Come fai? Quanto spazio del foglio colori?
A non risponde.
Ins: Ti puoi fermare a colorare vicino al vertice? Ricordi che l'angolo è…
A: Illimitato… allora no?
Ins: Ma non lo devi chiedere a me. Lo sai da solo. Devi pensare che non finisce qui (e indica il lato opposto a quel vertice). Non è forse così?
A: Sì. Devo pensare che non finisce. Ma qui c'è un lato (indica anche lui il lato del poligono opposto al vertice che stavano considerando) e allora finisce qui.
Ins: Ma no. Ma no… Perché pensi che un angolo possa finire lì? Devi continuare a immaginarlo per tutto il piano.
A: E il lato?
Ins: Devi immaginare che non c'è. Ora colora l'angolo, ma tutto, proprio tutto!
A non fa nulla.
Ins: Guarda bene il tuo disegno. Questa parte che io tocco è l'angolo (con il dito indice della mano destra inizia a passare sui lati dell'angolo interno del poligono prolungandoli, poi tocca lo spazio interno dell'angolo del poligono uscendo dal lato opposto al vertice). Non è forse questo l'angolo che avevi in mente?
A non risponde.
Ins: Colorando tutto quello spazio avrai colorato l'angolo, non è così?
A: Sì?
Ins: Allora come sono gli angoli del poligono? Sono forse limitati dai lati del poligono?
A: No?
Ins: Bravo! E allora se non sono limitati come sono? Se non sono *limitati* saranno *il…*

A: Illimitati.
Ins: Bravissimo!

Scuola superiore, IV

Sulla lavagna campeggia la scritta: sen(α+β)=sen
Ins: Dunque? Non te lo ricordi?
A: Sì.
Aggiunge qualcosa e la formula diventa: sen(α+β)=senα+
L'insegnante lo blocca:
Ins: Attento, attento, aspetta prima di scrivere quel più.
A si blocca.
Ins: Ti ricordi? Devi moltiplicare e non sommare…
A tace e guarda i compagni a posto.
Ins: Sì, lo abbiamo già visto: sen alfa cos beta e poi sì il più.
A non sa che fare.
L'insegnante si alza e scrive: sen(α+β)=senα cosβ +
Ins: Ecco, adesso te lo ricordi di sicuro, adesso puoi continuare da solo. Devi sono scambiare…
A tace.
Ins: Sen alfa cos beta e più cos alfa… E?
A scrive: sen(α+β)=senα cosβ + cosα
A: Così?
Ins: Eh già, ma devi completare; sen cos e cos sen, ricordi?
A scrive: sen(α+β)=senα cosβ + cosα senβ, e poi guarda dubbioso l'insegnante.
Ins: Sì, è così, però lo devi ripassare bene, non puoi aspettare che io ti imbocchi passo per passo, devi saperlo fare da solo. Studialo ancora a casa, così poi te lo ricordi: sen alfa cos beta, cos alfa sen beta. Facile no?

Scuola media, I

L'insegnante sta lavorando sul calcolo necessario per determinare il minimo comun denominatore. Raccoglie un insuccesso generale in classe. Dopo l'insuccesso, imposta di nuovo la lezione.
Ins: Vediamo insieme cosa si deve fare. Allora… tu, C., mi dici qual è la prima cosa da fare?
C non dice nulla.
Ins: Dai… occorre ridurre… ridurre cosa?

C: I numeri delle frazioni?
Ins: Ma certo, ridurre le frazioni ai minimi…
C: Termini.
Ins: Sì, certo… se non lo sono. Bravo! Poi, G. cosa si deve fare? Delle frazioni che ora hai devi calcolare il minimo…
G: Minimo comun denominatore!
Ins: Sì, certo! Ma per farlo devi calcolare il minimo comune multiplo, non ricordi? Prendi i fattori comuni e non …
G: Comuni.
Ins: Sì, bravo. Ma solo quelli con il massimo esponente. E quante volte devi prenderli? Solo…
G: Solo una?
Ins: Sì, perfetto. Bravi!

Liceo linguistico, esame di maturità

L'esaminatore vuole discutere con la candidata la relazione tra il limite di una funzione e la sua continuità partendo dal calcolo di un limite presente nella prova scritta assegnata alla classe.
Nel compito la candidata, calcolando i limiti agli estremi del dominio, scrive la seguente catena di uguaglianze:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

L'esaminatore tra sé e sé dice qualcosa a proposito del segno di uguaglianza e poi chiede di giustificare la presenza del 2 al numeratore e dello 0 al denominatore.
A: Ho sostituito 1 al posto della x al numeratore e al denominatore, ottenendo 2 e 0 rispettivamente.
E: Sì, è corretto, ma perché hai sostituito? Stiamo calcolando un limite, che cosa c'entra?
A: In questo momento non mi viene in mente, ma quando ci sono le frazioni abbiamo sempre fatto così.
E: Ti ricordi la definizione di funzione continua in un punto?
A: Direi di sì. Una funzione è continua quando: $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

E: Brava. Come ci può aiutare questo nel calcolo del limite?
L’allieva tace disorientata e non sa come continuare.
E: Le funzioni x^2+1 e x^2-1 sono continue?
A: Sì, sono due parabole.
E: Bene, cosa significa che sono continue?
A. Che il grafico si presenta con un tratto continuo senza interruzioni.
E: Sì, ma cosa c’entra con il calcolo del limite? Torna alla definizione che hai dato prima.
A: Questa con il limite? (Indica sul foglio la definizione scritta prima).
E: Sì, quella; riscrivila.
L’allieva riscrive: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
E: Bene; ma nel nostro caso cosa corrisponde a *f(x)* e x_0 ?
A: La frazione $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ e 1.
E: Questa funzione è continua in 1?
A: Non saprei.
E: È definita in 1?
A: No, una frazione non può avere lo 0 al denominatore.
E: Giusto, allora…
A: Consideriamo le due funzioni x^2+1 e x^2-1.
E: Giusto, come li calcoliamo i limiti? Puoi applicare la definizione di funzione continua?
A: Applicando la definizione di continuità, poiché $x_0=1$ posso sostituire 1 alle due funzioni e ottengo rispettivamente 1 e 0.
E: Hai capito perché possiamo sostituire 1 nella x al numeratore e al denominatore?
A: Sì, adesso mi è chiaro.
E: Molto bene, complimenti; puoi andare.

Scuola superiore, II

L’insegnante chiede ad un allievo di risolvere l’equazione $x^2+1=0$ senza eseguire alcun calcolo.
L’allievo non rispetta la consegna dell’insegnante e risolve l’equazione con il metodo utilizzato per le equazioni pure: $x^2=-1$, $x = \pm\sqrt{-1}$
A: Poiché la radice di un numero negativo non si può fare l’equazione è impossibile.

Ins: Ti avevo chiesto di risolverla senza calcoli.
A: Il mio ragionamento è corretto, l'equazione è impossibile. Quando si porta un numero a destra si cambia segno e la radice di un numero negativo non si può fare.
Ins: Quello che hai fatto è giusto, ma vediamo se riusciamo a risolvere l'equazione senza fare calcoli.
A: Non mi viene in mente niente.
Ins: Cosa significa trovare la soluzione di un'equazione?
A: Risolverla, trovare la x.
Ins: Si, ma che significa trovare la x ?
A: Porto tutte le x da una parte e i numeri dall'altra, poi divido entrambi i membri dell'equazione per il numero che moltiplica la x.
Ins: Ma come fai a dire che quella è la soluzione?
A: Arrivo a scrivere x uguale a un numero e quella è la soluzione.
Ins: La soluzione è la x o il numero?
A: Il numero
Ins: Giusto, come fai a dirlo?
A: Non lo so
Ins: Proviamo con un'equazione molto semplice.
Scrive: x-1=0.
Ins: Applicando quello che mi hai detto ottengo x=1. Giusto?
A: Sì.
Ins: Se sostituisco 1 alla x nell'equazione, cosa ottengo?
A: 1-1=0.
Ins: Questa uguaglianza è vera?
A: Sì.
Ins: 1 è una soluzione dell'equazione?
A. Sì.
Ins: Torniamo all'equazione x^2+1=0. Come potresti risolverla senza fare i calcoli?
A: Non lo so.
Ins: Secondo il ragionamento di prima, quando un numero è una soluzione?
A: Quando x è uguale a quel numero.
Ins: Ma quel numero, che proprietà deve avere?
(L'insegnante invita l'allievo a riguardare i passaggi che hanno portato alla soluzione dell'equazione x-1=0).
A: Se sostituisco ottengo 0=0.

Ins: Non necessariamente; deve essere un’uguaglianza vera.
A: Sì, giusto.
Ins: Se sostituiamo dei numeri al posto della x in $x^2+1=0$, che cosa succede? Prova con 0, ad esempio.
A: 1=0.
Ins: 0 è una soluzione?
A: No.
(L’insegnante invita l’allievo a provare con altri numeri e a verificare che l’uguaglianza che si ottiene è falsa. L’allievo non coglie il senso della cosa. L’insegnante cambia strategia).
Ins: 1 che tipo di numero è?
A: Un numero intero.
Ins: Sì, ma che segno ha?
A: Positivo.
Ins: Può essere uguale a zero?
A: No
Ins: Giusto. E x^2?
A: Positivo
Ins: Un numero strettamente positivo sommato a un numero positivo può essere uguale a zero?
A: No.
Ins: L’equazione può avere soluzione?
A: No.
Ins: Analizzando i segni degli addendi che compaiono a primo membro dell’equazione, si vede, senza fare calcoli, che l’equazione è impossibile. Vero?
A: Sì.
Ins: Bene.

4. Una brevissima conclusione

Si nota immediatamente che l’esempio iniziale, nell’opera di Pagnol, era relativo ad un dettato di lingua e che noi, da Brousseau in poi, lo abbiamo declinato sul versante della matematica; questo significa che l’effetto Topaze è tipico delle situazioni d’aula in generale e non della sola matematica; che le didattiche disciplinari si rinforzano l’un l’altra e che ciascuna trae linfa dagli esempi fatti nell’altra; che esistono temi comuni alle varie didattiche disciplinari.
Il che potrebbe portare frutti interessanti in studi futuri.

Nota e ringraziamenti
Gli esempi trascritti in precedenza fanno parte di una vasta raccolta della quale siamo debitori a vari collaboratori che ci hanno aiutato a costruirla; tra essi, soprattutto Ines Marazzani, George Santi e Silvia Sbaragli, che ringraziamo.
Ma vari esempi, anche molti di quelli che non abbiamo riportato qui per brevità, ci sono stati forniti da straordinari insegnanti che si sono auto-analizzati e che, in maniera spiritosa e altamente professionale, ci hanno raccontato di essersi resi conto di essere stati protagonisti dell'effetto Topaze in modo involontario. Una forma simpatica ed efficace di auto-analisi didattica.

Bibliografia

Brousseau G. (1986a). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.

Brousseau G. (1986b). *La théorization des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse. Bordeaux 1.

Brousseau G. (2008). *Ingegneria didattica e epistemologia dell'insegnante*. Bologna: Pitagora.

Brousseau G., D'Amore B. (2008). Buoni e cattivi usi delle analisi di tipo meta nell'attività didattica. In: D'Amore B., Sbaragli S. (eds.) (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula*. Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la matematica", n. 22, 7-9 novembre 2008, Castel San Pietro Terme. Bologna: Pitagora. 3-13.

D'Amore B. (2006). Didattica della matematica "C". In: Sbaragli S. (ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno*. Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 settembre 2006. Roma: Carocci. 93-96.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.

Pagnol M. (1931). *Topaze*. Parigi: Fasquelle. [Si sono poi avute varie riedizioni, con case editrici diverse: la più recente: 2004, Parigi: Éditions du Fallois].

damore@dm.unibo.it – www.dm.unibo.it/rsddm

Parole chiave: effetto Topaze; contratto didattico; didattica della matematica.

Key words: Topaze effect; didactic contract; mathematics education.